Nombres et calcul

Connaître les tables de multiplication est primordial !
Privilégier le calcul mental à la calculatrice !
La répétition en mathématique est cruciale !

Le présent document est un inventaire des notions de mathématiques à savoir à la fin du collège, selon les programmes officiels)
Il ne se substitue donc en aucun cas à un cours avec exercices.

Laurent & Mireille du site https://mathÉmatiques.net

Les nombres entiers

☞ *Connaître les nombres entiers*

Sixième

▶ 1 - Savoir lire un nombre entier écrit en chiffres

Pour lire un nombre entier écrit en chiffres :
① regrouper les chiffres par classe* (classes des unités simples, des mille, des millions, des milliards…) en commençant par la classe la plus à droite (celle des unités simples) ;
② à la lecture, nommer les classes au passage de l'une à l'autre (sauf les unités simples).

* constituée chacune de 3 chiffres représentant les rangs des unités, des dizaines et des centaines.

Exemple : Lire le nombre 81705239645.

①	On réécrit le nombre en regroupant les chiffres par classe en commençant par la classe des unités simples	$\underbrace{81}_{\text{classe des milliards}}\ \underbrace{705}_{\text{classe des millions}}\ \underbrace{239}_{\text{classe des mille}}\ \underbrace{645}_{\text{classe des unités simples}}$
②	On lit le nombre en nommant les classes (on ne prononce pas *unités simples*)	« quatre-vingt-un *milliards* sept cent cinq *millions* deux cent trente-neuf *mille* six cent quarante-cinq ~~*unités*~~ »

Pour lire les grands nombres, on peut aussi s'aider d'un tableau permettant d'identifier les différentes classes (unités simples, mille, millions, milliards) et, à l'intérieur de chacune des classes, les rangs des unités, dizaines et centaines. On y place le nombre en l'écrivant de la droite vers la gauche.
Ainsi, reprenons le nombre 81705239645 et plaçons-le dans le tableau, en commençant par le chiffre des unités :

classe des milliards			classe des millions			classe des mille			classe des unités simples		
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u
	8	1	7	0	5	2	3	9	6	4	5

u : unités, d : dizaines, c : centaines

Nous obtenons de même : « quatre-vingt-un *milliards* sept cent cinq *millions* deux cent trente-neuf *mille* six cent quarante-cinq ~~*unités*~~ ».

▶ 2 - Savoir écrire un nombre en chiffres

Pour écrire en chiffre un nombre prononcé ou écrit en lettres :
① repérer dans le nombre prononcé ou écrit les noms de classe (milliards, millions, mille) ;
② écrire le nombre en chiffres en commençant par la gauche (par le chiffre de rang le plus élevé de la classe la plus élevée) en ajoutant un espace à la place de chaque nom de classe et en ajoutant les zéros nécessaires pour compléter à trois chiffres chacune des classes.

Exemple : Écrire le nombre « deux milliards six millions cent soixante-trois mille cinq cent quarante-trois ».

①	On repère dans le nombre les noms de classe	deux *milliards* six *millions* cent soixante-trois *mille* cinq cent quarante-trois
②	On écrit le nombre en chiffre en ajoutant les espaces et les 0 nécessaires	2 006 163 543

3 - Savoir écrire un nombre en lettres

Pour écrire en lettres un nombre écrit en chiffres :
① repérer dans le nombre écrit en chiffres les espaces entre classes ;
② l'écrire en ajoutant les noms des classes correspondant tout en respectant les règles :
- ▹ million et milliard s'accordent ;
- ▹ mille est invariable ;
- ▹ cent et vingt s'accordent seulement si les mots cent et vingt sont à la fin du nombre ;
- ▹ on ne met de tiret que pour des nombres inférieurs à cent.

Exemple : Écrire le nombre 58 243 967.

①	on repère dans le nombre les espaces entre classes	58 243 967
②	on écrit le nombre en lettres en ajoutant les noms de classes et en respectant les règles	cinquante-huit millions deux cent quarante-trois mille neuf cent soixante-sept

4 - Savoir identifier les chiffres / nombres des unités, des dizaines, des centaines…

Pour identifier les chiffres / nombres des unités, des dizaines, centaines… d'un nombre, on peut utiliser un tableau.

Exemple : Dans le nombre 17 368 542

classe des millions			classe des mille			classe des unités simples			
c	d	u	c	d	u	c	d	u	
	1	7	3	6	8	5	4	2	le chiffre des dizaine est 4
	1	7	3	6	8	5	4	2	le chiffre des centaines de mille est 3
	1	7	3	6	8	5	4	2	le nombre de millions est 17
	1	7	3	6	8	5	4	2	le nombre de dizaines de mille 1736

u : unités, d : dizaines, c : centaines

5 - Savoir décomposer un nombre entier

Décomposer un nombre entier (ou écrire un nombre entier sous forme décomposée) signifie l'écrire en faisant apparaître les chiffres des unités, des dizaines, des centaines, des milliers…

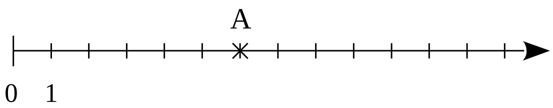
Exemple : Écrire le nombre 435 278 sous une forme décomposée.

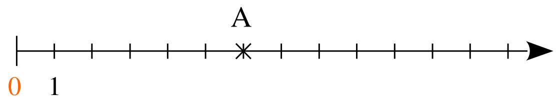
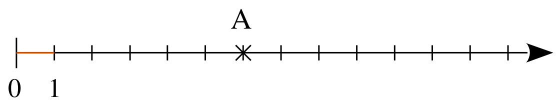
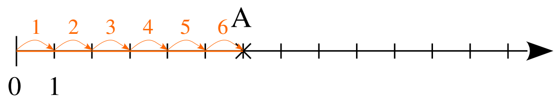
435 278 = (4×100 000) + (3×10 000) + (5×1 000) + (2×100) + (7×10) + 8
Le chiffre des unités est 8, celui des dizaines 7, des centaines 2, des milliers 5…

► 6 - Savoir lire l'abscisse[1] d'un point sur un axe gradué[2]

Pour déterminer l'abscisse d'un point sur un axe gradué :
① repérer l'emplacement de l'origine ;
② déterminer l'unité de longueur (distance entre deux traits de graduation consécutifs) ;
③ compter le nombre d'unités à partir de l'origine pour arriver au point.
Le nombre obtenu est l'abscisse du point.

Exemple : Lire l'abscisse du point A sur l'axe gradué.

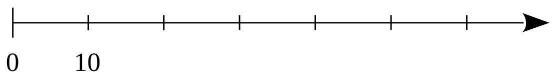


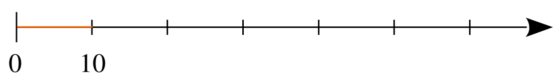
①	On repère l'emplacement de l'origine	
②	On détermine l'unité de longueur (distance entre deux graduations consécutives)	 L'unité de longueur est 1 (distance entre 0 et 1)
③	On compte le nombre d'unités à partir de l'origine pour arriver au point A. Ce nombre est l'abscisse du point A.	 L'abscisse du point A est 6. On note A(6).

► 7 - Savoir placer un point sur un axe connaissant l'abscisse du point

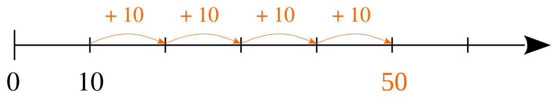
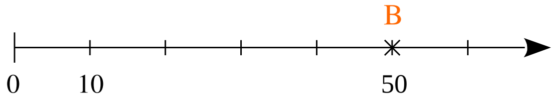
Pour placer un point d'abscisse donnée sur un axe gradué :
① déterminer la longueur unité (longueur entre deux traits de graduation consécutifs) ;
② à partir de l'origine (ou de n'importe quelle abscisse connue), ajouter autant d'unités que nécessaire pour atteindre la valeur de l'abscisse du point à placer ;
③ placer le point.

Exemple : Placer le point B d'abscisse 50 sur l'axe gradué suivant.



①	On détermine l'unité de longueur (distance entre deux traits de graduation consécutifs)	 L'unité de longueur est 10 (distance entre 0 et 10)

1 L'abscisse d'un point est le nombre permettant de repérer ce point sur un axe gradué.
2 Un axe gradué est une droite munie d'une origine et sur laquelle a été reportée une unité de longueur régulièrement à partir de son origine.

②	On ajoute autant d'unités de longueur que nécessaire pour atteindre 50. On place le point B	
③	On place le point B	

▶ 8 - SAVOIR COMPARER DEUX NOMBRES ENTIERS

Comparer deux nombres c'est dire lequel est le plus grand, lequel est le plus petit ou s'ils sont égaux. Pour cela, on compte leurs nombres de chiffres. Il y a alors deux cas :

❶ nombre de chiffres différents

Celui qui a le plus grand nombre de chiffres est le plus grand. On dit qu'« il est supérieur à l'autre ». Le plus petit des deux est dit inférieur au plus grand.

❷ même nombre de chiffres

On compare leurs chiffres en partant de la gauche. Celui des deux dont le chiffre le plus à gauche est le plus grand est supérieur à l'autre. S'ils sont égaux, on compare les chiffres suivants et ainsi de suite. S'ils sont tous égaux, les deux nombres sont égaux.

Pour le noter, on utilise les symboles >, < ou =.

<u>Exemple</u> : Comparer les nombres : a) 28 256 et 6 713 b) 6 379 et 6 921

a) Comparons 28 256 et 6 713

On compare leur nombre de chiffres : 28 256 est composé de 5 chiffres et 6 713 de 4 chiffres. ➲ Ils n'ont pas le même nombre de chiffres ☞ ❶	
Le plus grand des deux est celui qui a le plus grand nombre de chiffres. Le plus petit est donc l'autre.	28 256 est donc supérieur à 6 713. On note 28 256 > 6 713 6 713 est donc inférieur à 28 256

b) Comparons 6 379 et 6 921

On compare leur nombre de chiffres : 6 379 est composé de 3 chiffres et 6 921 de 3 chiffres. ➲ Ils ont le même nombre de chiffres ☞ ❷	
On compare leurs chiffres en partant de la gauche.	
- on compare leur chiffre le plus à gauche, ici leur chiffre des mille.	➡ 6 379 et 6 921 ⇒ 6 et 6 sont égaux.
- on compare leur chiffre suivant, ici celui des centaines.	➡ 6 379 et 6 921 ⇒ 3 et 9 sont différents.
Celui des deux nombres dont le chiffre des centaines est plus grand est supérieur à l'autre.	➡ 9 est supérieur à 3 ⇒ 6 921 est donc supérieur à 6 379 : 6 921 > 6 379

9 - Savoir ranger des nombres entiers dans l'ordre croissant et décroissant

Ranger des nombres entiers dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand) ou dans l'ordre décroissant (du plus grand au plus petit), consiste à comparer deux à deux tous les nombres. Pour ranger dans l'ordre croissant on trouve le plus petit de tous les nombres, puis le plus petit de ceux qui restent et ainsi de suite jusqu'au dernier. On les écrit dans l'ordre en utilisant le symbole <. Pour ranger dans l'ordre décroissant on trouve le plus grand de tous les nombres, puis le plus grand de ceux qui restent et ainsi de suite jusqu'au dernier. On les écrit dans l'ordre en utilisant le symbole >.

Exemple : Ranger dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand) les nombres
56 542 – 62 321 – 3 548 – 35 789 – 135 485 – 14 503 – 365

On cherche dans la liste le plus petit des nombre. Pour cela on compare leur nombre de chiffres (8). D'après 8 ❶	365 possède 3 chiffres et tous les autres possèdent de 4, 5 ou 6 chiffres. Le plus petit nombre est donc 365.
365	
On fait de même parmi les nombres qui restent. D'après 8 ❶	3 548 possède 4 chiffres. Les autres possèdent 5 ou 6 chiffres. Le plus petit nombre est donc 3 548.
365 < 3 548	
On fait de même parmi les nombres qui restent. D'après 8 ❷	56 542, 62 321, 35 789 et 14 503 possèdent tous 5 chiffres. Le plus petit nombre est donc 14 503.
365 < 3 548 < 14 503	
On fait de même pour les trois autres nombres possédant 5 chiffres. D'après 8 ❷	On obtient respectivement 35 789, 56 542 et 62 321
365 < 3 548 < 14 503 < 35 789 < 56 542 < 62 321	
Il n'en reste plus qu'un.	On obtient 135 485
365 < 3 548 < 14 503 < 35 789 < 56 542 < 62 321< 135 485	

☞ *Savoir manipuler les nombres entiers*

Sixième

► 10 - Savoir additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres entiers

En 6[e], savoir additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres entiers signifie :
- pour les petits nombres, être capable d'effectuer le calcul de tête (calcul mental) ;
- pour les plus grands nombres, être capable de poser l'opération et d'effectuer le calcul.

Exemple : a) Effectuer les calculs de tête :
$12 + 7$ $19 - 11$ 4×12 $18\div3$
b) Effectuer les calculs en posant l'opération :
$2\,356 + 5\,624$ $9\,654 - 6\,873$ 213×24 $184\div8$

Remarques : ► Il est primordial d'acquérir, et **le plus rapidement possible**, des réflexes de calcul mental
► Il est indispensable de connaître **parfaitement** les tables de multiplication

► 11 - Connaître le vocabulaire associé aux opérations

Il s'agit du vocabulaire de l'addition, de la soustraction et de la multiplication :
▹ Dans une addition, les nombres que l'on additionne s'appellent *les termes* et le résultat s'appelle *la somme*.
▹ Dans une soustraction, les nombres que l'on soustrait s'appellent *les termes* et le résultat s'appelle *la différence*.
▹ Dans une multiplication, les nombres que l'on multiplie s'appellent *les facteurs* et le résultat s'appelle *le produit*.

Exemples : ▹ dans l'addition $12 + 21$, 12 et 21 sont les termes et la somme est 33.
▹ dans la soustraction $25 - 15$, 25 et 15 sont les termes et la différence est 10 .
▹ dans la multiplication 6×30, 6 et 30 sont les facteurs et le produit est 180.

► 12 - Connaître la propriété de commutativité de l'addition et de la multiplication

▹ Dans une addition, on peut changer l'ordre des termes.
▹ Dans une multiplication, on peut changer l'ordre des facteurs.

Exemples : ▹ $9 + 25 = 25 + 9 = 36$
▹ $15 \times 3 = 3 \times 15= 45$

► 13 - Connaître la propriété d'associativité de l'addition et de la multiplication

▹ Dans une addition de plus de deux termes, ont peut grouper des termes.
▹ Dans une multiplication de plus de deux facteurs, on peut regrouper des facteurs.

Exemples : ▹ Pour l'addition :
$9 + 1 + 14 + 6 = (9 + 1) + (14 + 6) = 10 + 20 = 30$
▹ Pour la multiplication :
$3 \times 6 \times 5 \times 2 = (3 \times 6) \times (5 \times 2) = 18 \times 10 = 180$

▶ 14 - Savoir utiliser les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition et de la multiplication

L'utilisation combinée des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition et de la multiplication peut permettre de faciliter un calcul.

Exemple : a) Effectuer judicieusement[3] l'addition : $25 + 18 + 75 + 2$
b) Effectuer judicieusement la multiplication : $9\times4\times6\times25$

a) En commutant 18 et 75 (①), puis en associant d'une part 25 et 75 et d'autre part 18 et 2 (②), on a :

$$25 + \underbrace{18 + 75}_{\text{①}} + 2 = 25 + 75 + 18 + 2 = \underbrace{25 + 75}_{\text{②}} + \underbrace{18 + 2}_{\text{②}} = 100 + 20 = 120$$

b) En commutant 4 et 6 (①), puis en associant d'une part 9 et 6 et 4 et 25 d'autre part (②), on a :

$$9 \times \underbrace{4 \times 6}_{\text{①}} \times 25 = 9 \times 6 \times 4 \times 25 = \underbrace{9 \times 6}_{\text{②}} \times \underbrace{4 \times 25}_{\text{②}} = 54 \times 100 = 5400$$

▶ 15 - Connaître le vocabulaire de la division entière[4]

Dans la division entière D÷d d'un nombre entier D (*dividende*) par un autre nombre entier d (*diviseur*) on a $D = d \times q + r$ où q est le *quotient* et r le *reste* (q et r entiers) avec $r<d$ *.

* il est important que cette condition soit vérifiée (il faut donc s'en assurer) sinon il ne s'agit pas d'une division entière

Exemple : La division entière de 893 (dividende) par 13 (diviseur), a pour quotient 68 et pour reste 9. On écrit : $893 = 13 \times 68 + 9$. On a bien $9<13$.
On a aussi $893 = 13 \times 67 + 22$, mais il ne s'agit pas d'une division entière car $22>13$.

▶ 16 - Savoir effectuer une division entière

Il faut savoir effectuer une division entière de tête (dans le cas de petits nombres entiers) ou en posant l'opération puis écrire l'égalité $D = d \times q + r$ avec $r<d$ (il faut donc s'en assurer).

Exemple : Effectuer les divisions entières a) de 14 par 3 b) de 893 par 13

a) De tête, nous voyons qu'au plus, nous pouvons « mettre quatre fois 3 dans 14 » et comme $3 \times 4 = 12$, il reste 2. Nous pouvons donc écrire $14 = 3 \times 4 + 2$ et nous avons bien $2<3$.

b) Posons la division de 893 par 13 :

$$\begin{array}{r|l} 8\;9\;3 & 1\;3 \\ \cline{2-2} -\;7\;8 & 6\;8 \\ \cline{1-1} 1\;1\;3 & \\ -\;1\;0\;4 & \\ \cline{1-1} 0\;0\;9 & \end{array}$$

3 « judicieusement » signifie de telle manière à faciliter le calcul, ici par l'utilisation des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition et de la multiplication

4 Division d'un entier par un autre entier et où le quotient et le reste sont entiers (dite aussi division euclidienne)

Nous pouvons donc écrire

$893 = 13 \times 68 + 9$ où 893 et nous vérifions que $9<13$.

17 - Savoir ce qu'est un diviseurs et un multiple d'un nombre entier

Si, dans la division entière de D par d, le reste r est nul, on dit alors que :
▹ d est un diviseur de D ou d divise D ou bien encore D est divisible par d ;
▹ D est un multiple de d.
De plus, si on note q le quotient de cette division, alors le reste de la division entière de D par q (le quotient étant alors d) est aussi nul et par conséquent, on peut aussi dire que :
▹ q est un diviseur de D ou q divise D ou D est divisible par q ;
▹ D est un multiple de q.

<u>Exemple</u> : Dans la division de 18 par 6, le reste est nul. On a alors : $18 = 6 \times 3$. On dit que
- 6 est un diviseur de 18 ou 6 divise 18 ou 18 est divisible par 6 ;
- 18 est un multiple de 6.

De même, puisque $18 = 6 \times 3 = 3 \times 6$, on dit que :
- 3 est un diviseur de 18 ou 3 divise 18 ou 18 est divisible par 3 ;
- 18 est un multiple de 3.

18 - Connaître et savoir appliquer les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9 et 10

▹ Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, ou 8 ;
▹ Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
▹ Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par son chiffre des dizaines et son chiffre des unités est divisible par 4 ;
▹ Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0, ou 5 ;
▹ Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
▹ Un nombre entier est divisible par 10 si on chiffre des unité est 0.

<u>Exemple</u> : a) Le nombre 20 est divisible par 2, par 5 et par 10 car son chiffre des unités est 0. Il n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffre $2 + 0 = 2$ n'est pas divisible par 3. Il est divisible par 4 (utilité de connaître ses tables de multiplication). Il n'est pas divisible par 9 car la somme de ses chiffres n'est pas divisible par 9.

b) Le nombre 180 est divisible par 2, par 5 et par 10 car son chiffre des unités est 0. Il est divisible par 3 car la somme de ses chiffres $1 + 8 + 0 = 9$ est divisible par 3. Il est divisible par 4 car 80 est divisible par 4. Pour finir il est divisible par 9 car la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Remarques : Les critères de divisibilité sont aussi importants à connaître que les tables de multiplication. Ils seront indispensables dans la réduction des fractions, dans la manipulation des expressions algébriques (factorisation)…

Cinquième

Aucune notions particulières n'est introduite. Les nombres connus sont manipulés à travers les problèmes, les mesures...

Quatrième

Aucune notions particulières n'est introduite. Les nombres connus sont manipulés à travers les problèmes, les mesures...

Troisième

► 19 - Savoir déterminer le PGCD de deux nombres entiers

Le PGCD de deux nombres entiers naturels est leur Plus Grand Commun Diviseur (soit leur plus grand diviseur commun).

Exemple : Déterminer le PGCD de 18 et 27.

En appliquant les critères de divisibilité (vus en sixième), les diviseurs de 18 (autres que 1 et 18) sont 2, 3, 6 et 9. Ceux de 27 sont 3 et 9. Le plus grand diviseur commun aux deux nombres est 9. On note PGCD(18 ; 27)=9.

Remarques :

▹ Il existe au programme deux méthode pour déterminer le PGCD de deux nombres entiers : la méthode des soustractions successives et l'« algorithme d'Euclide » utiles dans le cas des grands nombres

▹ La détermination du PGCD de deux nombres entiers sera utile notamment pour rendre une fraction irréductible.